Comment faire, avec un maximum de difficultés, un filtre numérique qui non seulement ne fait rien mais le fait aussi plus lentement que si on ne l'utilisait pas !

Didier Demigny

IUT de Lannion, Université de Rennes 1, didier.demigny@univ-rennes1.fr

Résumé

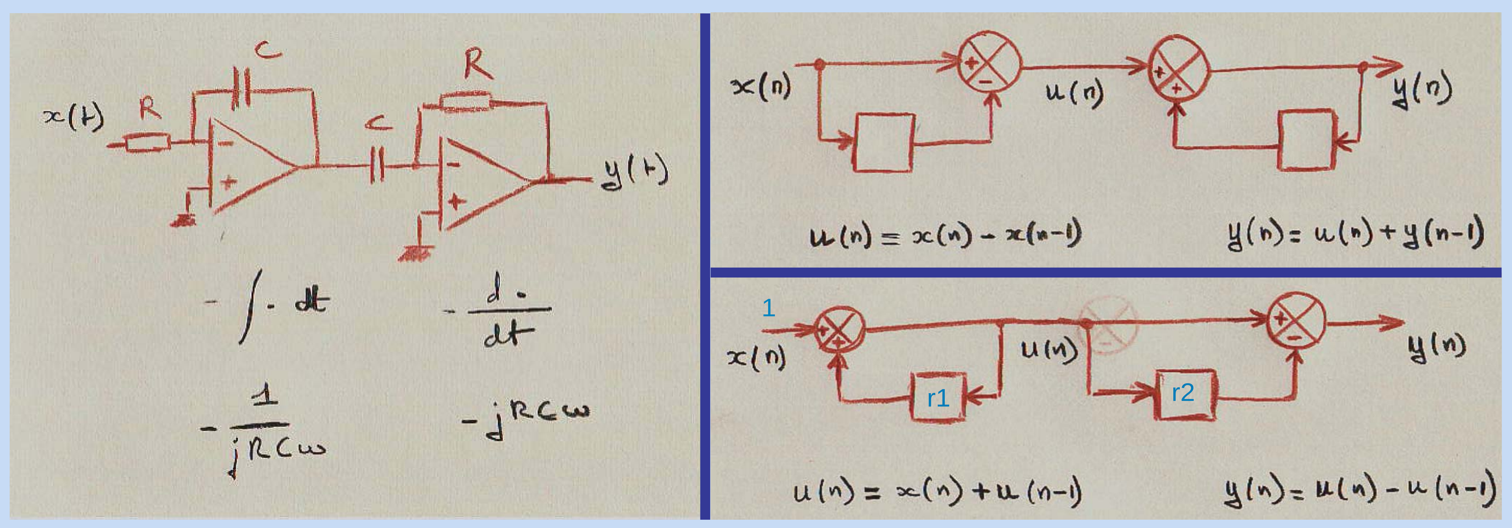
A l'heure où la princesse de Clèves
s'invite en place de grève,
où des universitaires se disent,
que le savoir n'est pas une marchandise,
dans un esprit, j'espère pas trop débile
élaborons un filtre fût-il inutile
et, usant de son pouvoir bien compris
calculons nos moyennes au meilleur prix
puis, du temps perdu à la recherche
(vous verrez quelle ne coûte pas lerche)
gaussons nous d'une réponse impulsionnelle
qui nous vernira d'un lissage exponentiel.

Même si tout ça ne remplit pas le bas de laine de Proust !

I. Le filtre qui fait néant

$$y(t) = x(t)$$

Une version analogique | | Deux versions numériques



$$y(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{d\,x}{d\tau} d\tau = x(t) - x(t_0) \quad || \quad y(n) = y(n-1) + x(n) - x(n-1)$$

Les fonctions de transfert :

$$TCa(j\omega) = -jRC\omega \cdot \frac{-1}{jRC\omega} = 1 \quad || \quad TC_N(j\omega) = (1 - e^{-j\omega}) \cdot \frac{1}{(1 - e^{-j\omega})} = 1$$

Problème avec la version numérique n˚2 ...

Ex : Si $\forall n \geq 0, \quad x(n) = 1$

En binaire naturel sur 4 bits : ERREUR

n	x	r1	u	r2	y
14	1	14	15	14	1
15	1	15	0	15	erreur

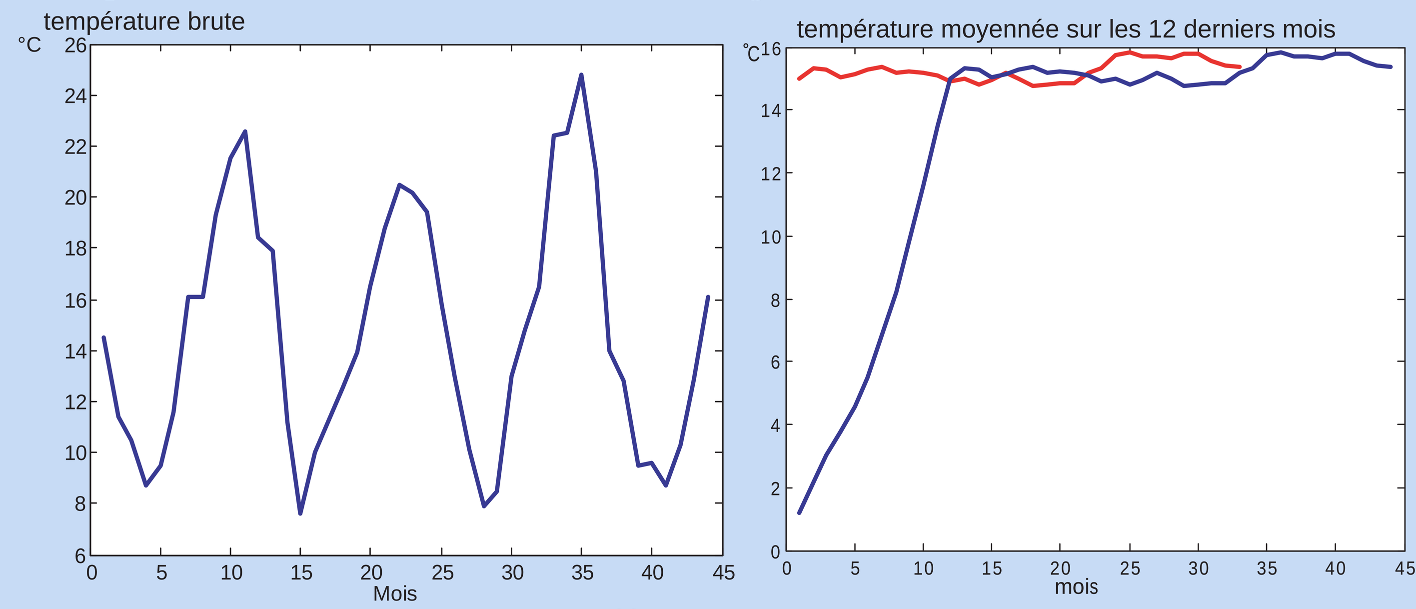
Par contre en complément à 2 sur 4 bits ... ça le fait ! [a]

n	x	r1	u	r2	y
6	1	6	7	6	1
7	1	7	-8	7	**1**
8	1	-8	-7	-8	**1**

a. Le sage travaille en nombre signé complément à 2 ... *les résultats intermédiaires sont dimensionnés à la taille du résultat final*

II. Une histoire du Moyennage !

Est-ce que la Terre se réchauffe en Bretagne ?



Moyennage sur 12 mois pour s'affranchir des variations saisonnières de température.

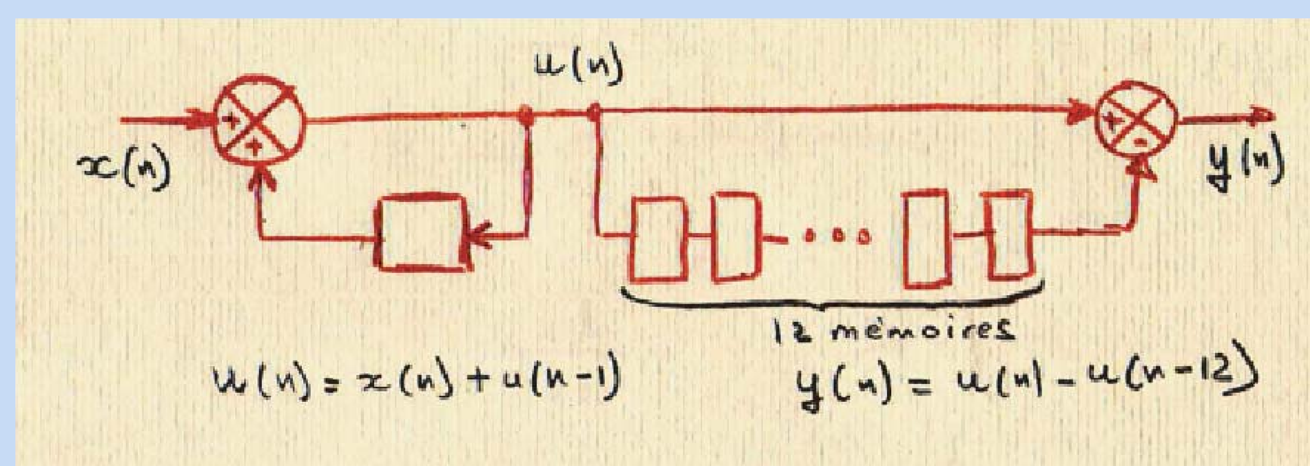
$$y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + ... + x(n-10) + x(n-11)$$

On peut réduire le nombre de calculs :

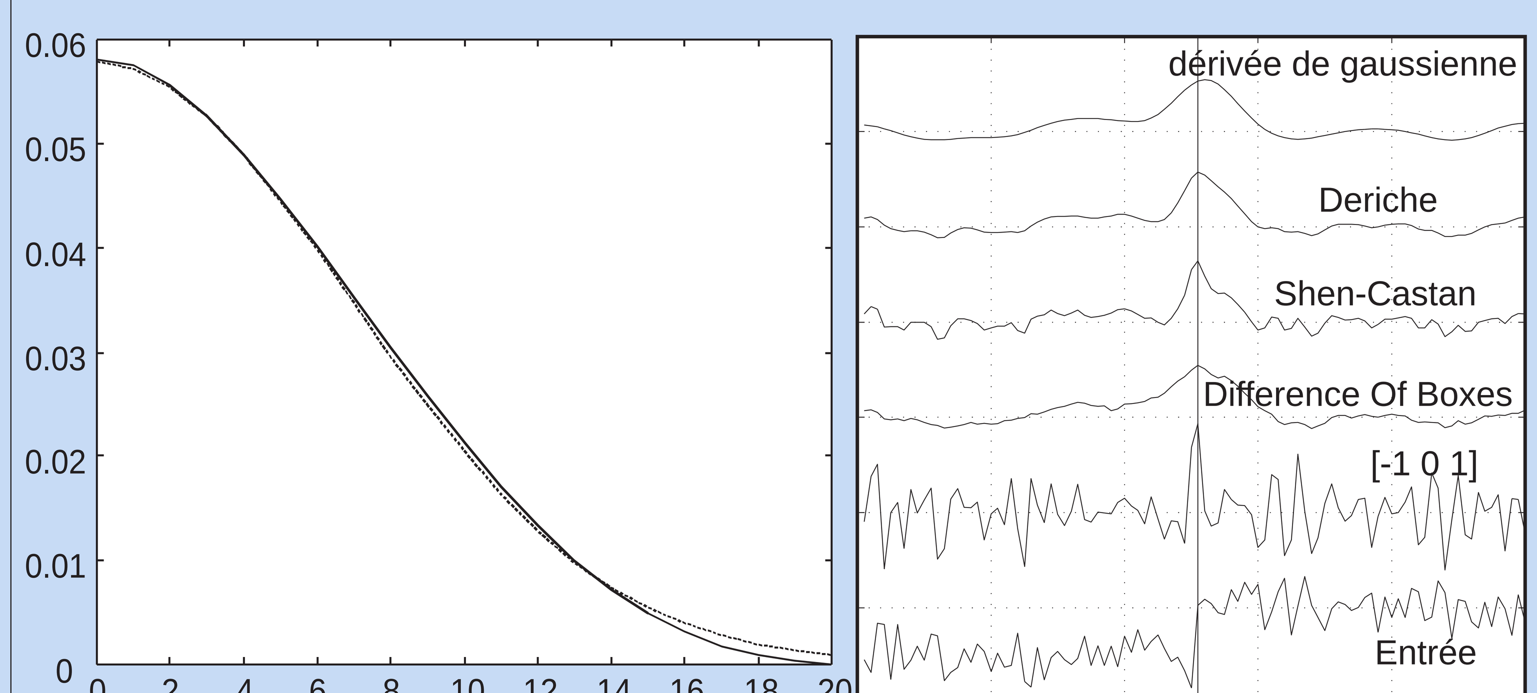
$$y(n) = y(n-1) + x(n) - x(n-12)$$

Fonction de transfert

$$M(j\omega) = \frac{1 - e^{-12j\omega}}{1 - e^{-j\omega}}$$



III. Une application sérieuse : approximation d'un filtre gaussien



Réponse impulsionnelle du filtre gaussien

$$g^{\sigma}(n) = C_g.e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}}$$

Approximation par un polynôme de degré 4 (filtre POAG) avec un nombre de coefficients égal à $2W + 1$.

$$h_W(n) = (w + 2 - |n|)(w + 1 - |n|)(-3n^2 + (2w + 3)\,|n| + w(w + 3))$$

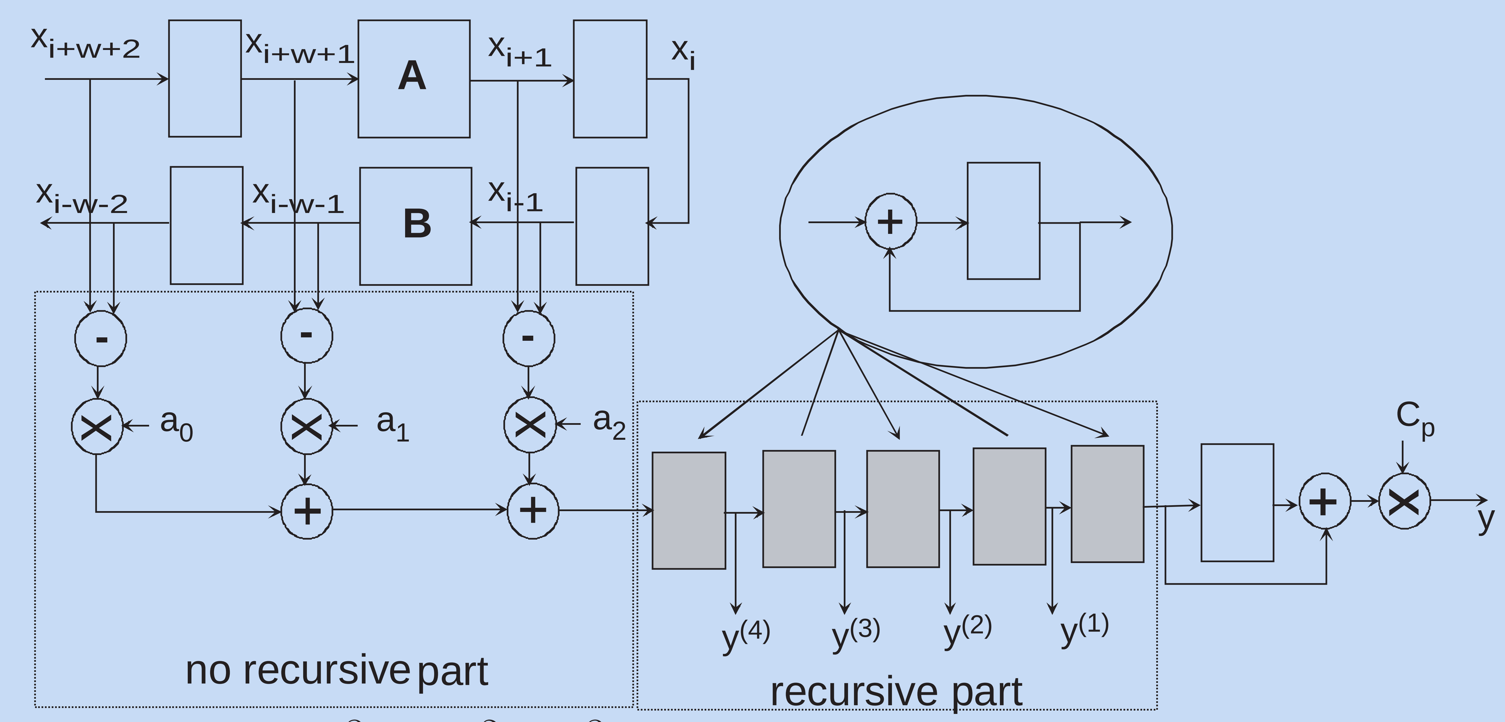
A chaque valeur de W correspond une gaussienne approximée avec $\sigma \simeq 0,3217 \times W + 0,81$

La réalisation de ce filtre transverse nécessite $w + 1$ multiplications et $2w$ additions.

Optimisation : sa réalisation sous forme récursive (avec 5 intégrateurs en cascade) conduit à un nombre de calculs indépendant de w : $4 \times$ et $10 +$.

Fonction de transfert en z :

$$\frac{[w(z^{(w+2)} - z^{-(w+2)}) + (w+3)(z^{-(w+1)} - z^{(w+1)}) + (2w+3)(z - z^{-1})] \cdot z^{-2}(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^5}$$



$a_0 = w,\ a_1 = w + 3, a_2 = 2w + 3.$

$$\begin{aligned} n &= a_0(x_{i+w+2} - x_{i-w-2}) + a_1(x_{i-w-1} - x_{i+w+1}) \\ &\quad + a_2(x_{i+1} - x_{i-1}) \\ t_1 &= t_1 + n \\ t_2 &= t_2 + t_1 \\ t_3 &= t_3 + t_2 \\ t_4 &= t_4 + t_3 \\ t_5 &= t_5 + t_4 \\ y_i &= C'_p(t_6 + t_5) \\ t_6 &= t_5 \end{aligned}$$

IV. Résultats : Miniprojet de T. Berthou et S. Tanguy R&T promo 2010

Sujets de TD et TP : http ://blogperso.univ-rennes1.fr/didier.demigny/

CETSIS 2010 8ème Colloque sur l'Enseignement des Technologies et des Sciences de l'Information et des Systèmes, Grenoble, 8-10 mars 2010.